



ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA

función Exponencial y
logaritmo

CICLO

PREUNIVERSITARIO

2024-1



Contenido

- **FUNCIÓN EXPONENCIAL**
- **FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL**
- **LOGARITMO**
- **PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS**
- **SISTEMA DE LOGARITMOS**

FUNCIÓN EXPONENCIAL

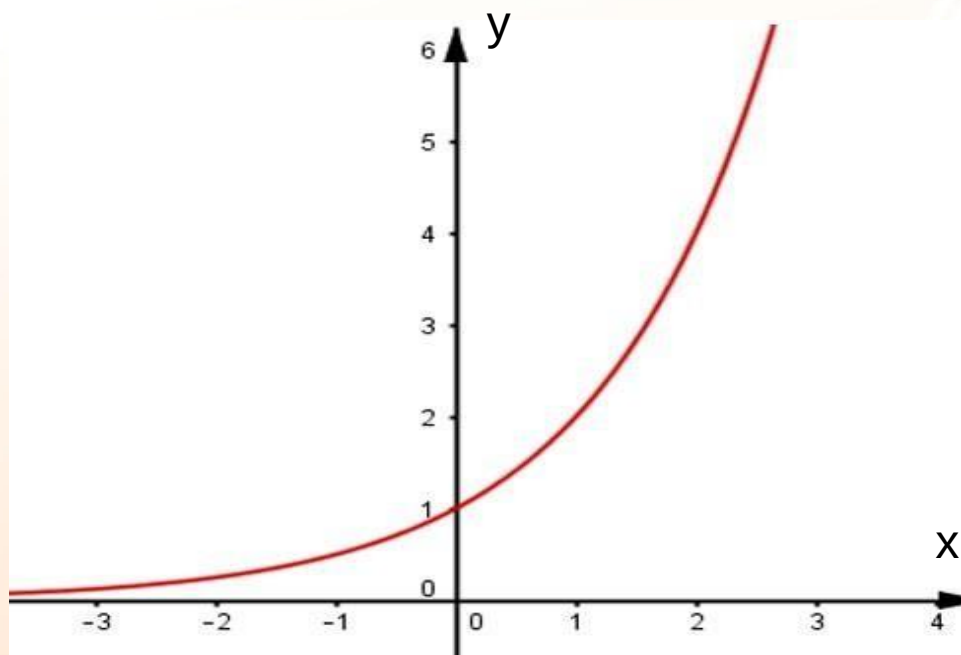
Definición: Función Exponencial

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, definimos la función exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

como: $f(x) = b^x$, $x \in \mathbb{R}$

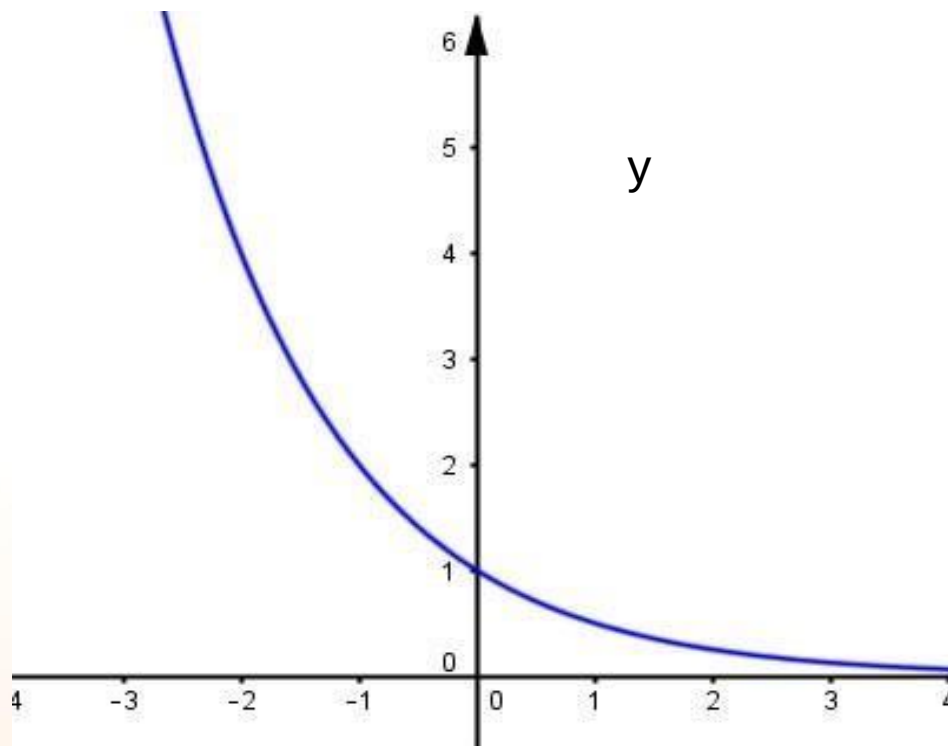
GRÁFICA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Caso 1: $b > 1$



- $Ran(f) = \mathbb{R}^+$
- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- La gráfica de f interseca al eje y en el punto $(0, 1)$.
- La función f es Creciente.
- La función f es Biyectiva.

Caso 2: $0 < b < 1$



- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Ran(f) = \mathbb{R}^+$
- La gráfica de f interseca al eje y en el punto $(0, 1)$.
- La función f es Decreciente.
- La función f es Biyectiva

x

Ejemplos

Grafique en un mismo plano las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 4^x$.

Resolución:

Notamos que en ambos casos las funciones tienen base mayor a uno, de lo cual deducimos que la gráficas deben ser crecientes.

Tabulando valores y graficando obtenemos:

x	-3	-2	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
4^x	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16

Tabla de valores de
 $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 4^x$

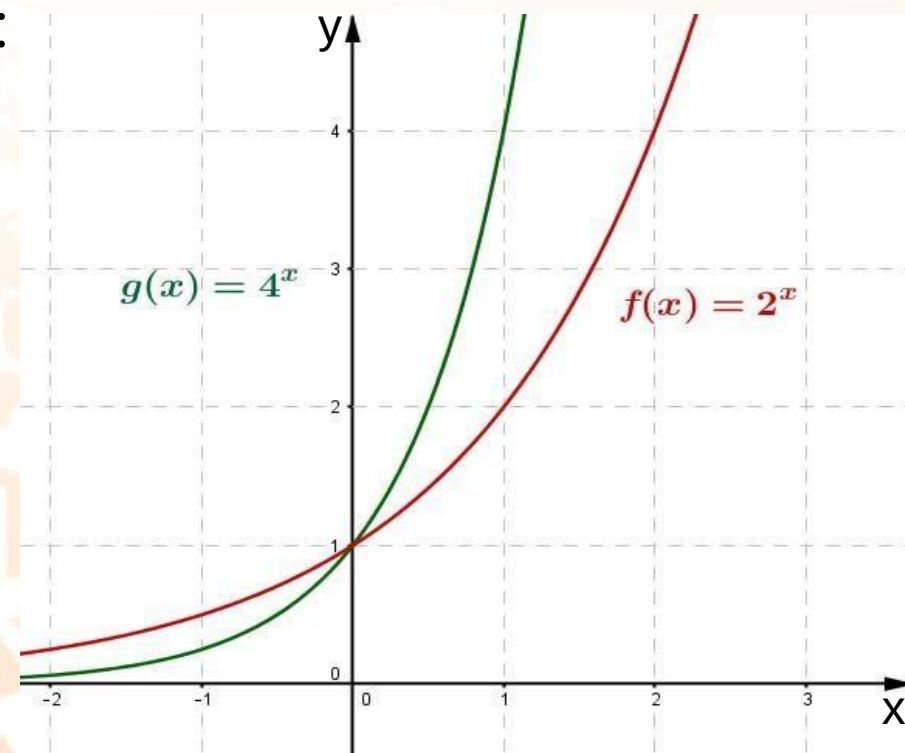
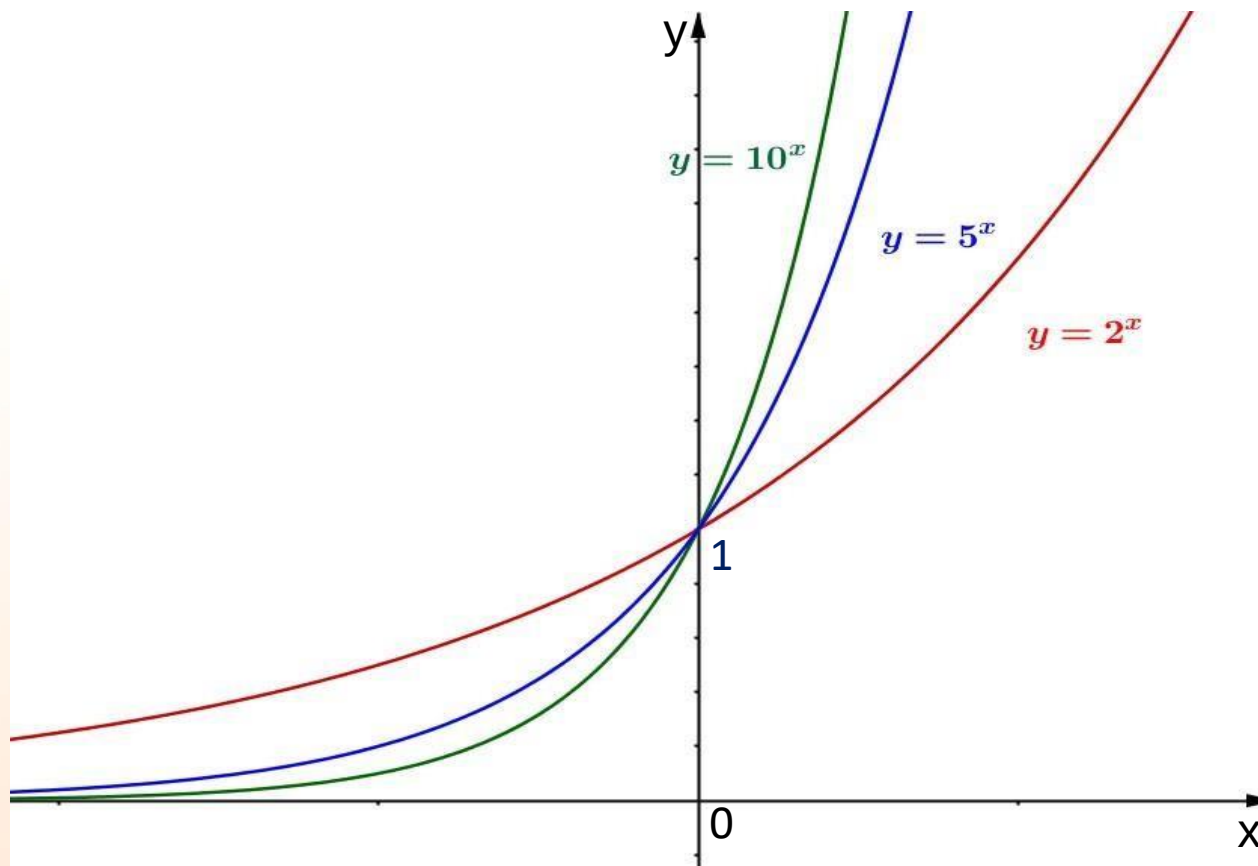
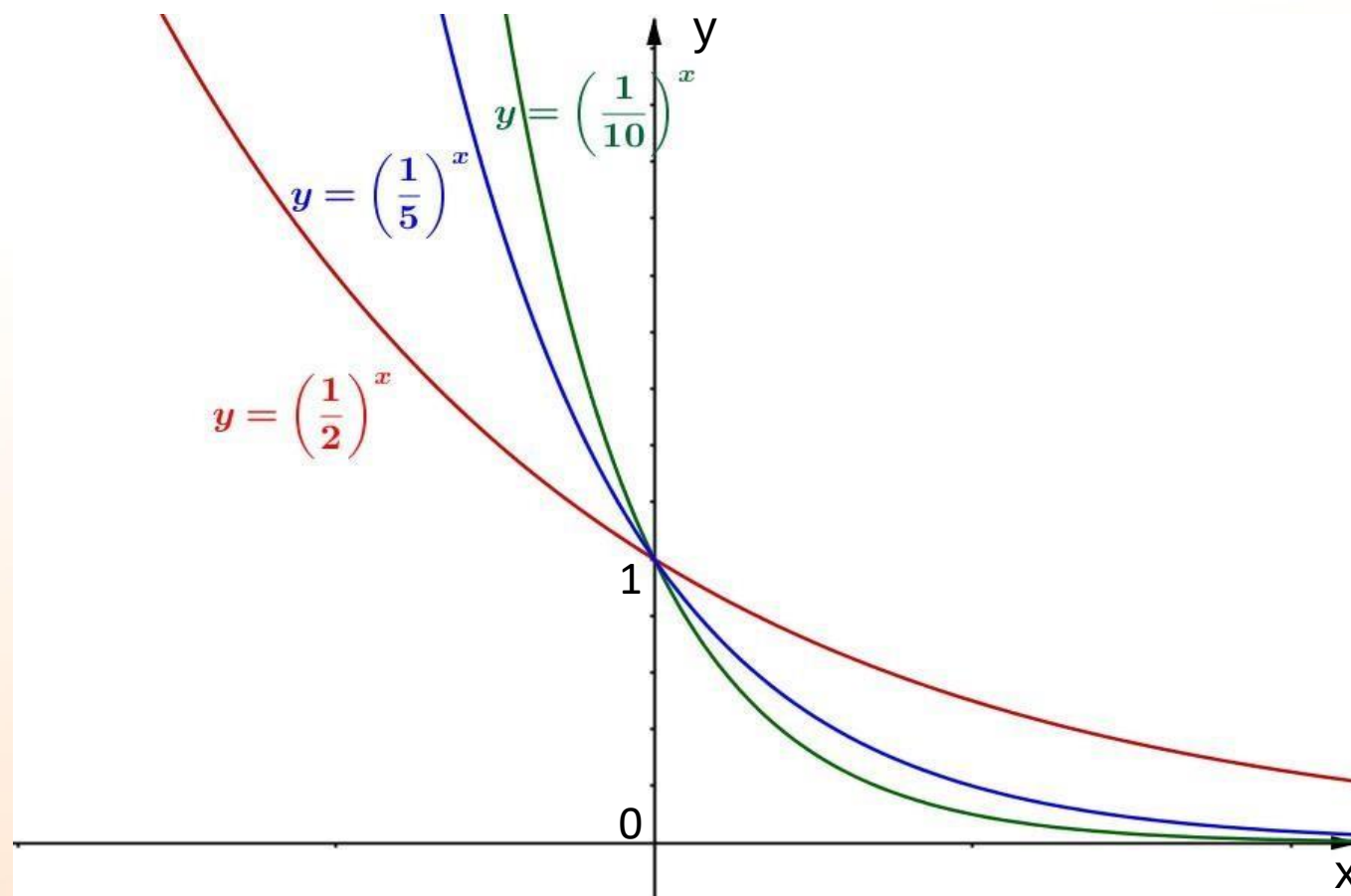


Figura: Gráficas de f y g

- Gráficas de algunas funciones exponenciales $f(x) = b^x$ con $b > 1$



- Gráficas de algunas funciones exponenciales $f(x) = b^x$ con $0 < b < 1$



Propiedades (Gráficas exponenciales)

Considerando conocida la gráfica de $f(x) = 3^x$, podemos obtener:

- $g(x) = 3^{x+1} = f(x + 1)$, la cual es la gráfica de f desplazada una unidad a la izquierda.
- $h(x) = 3^x - 2 = f(x) - 2$, la cual es la gráfica de f desplazada dos unidades hacia abajo.

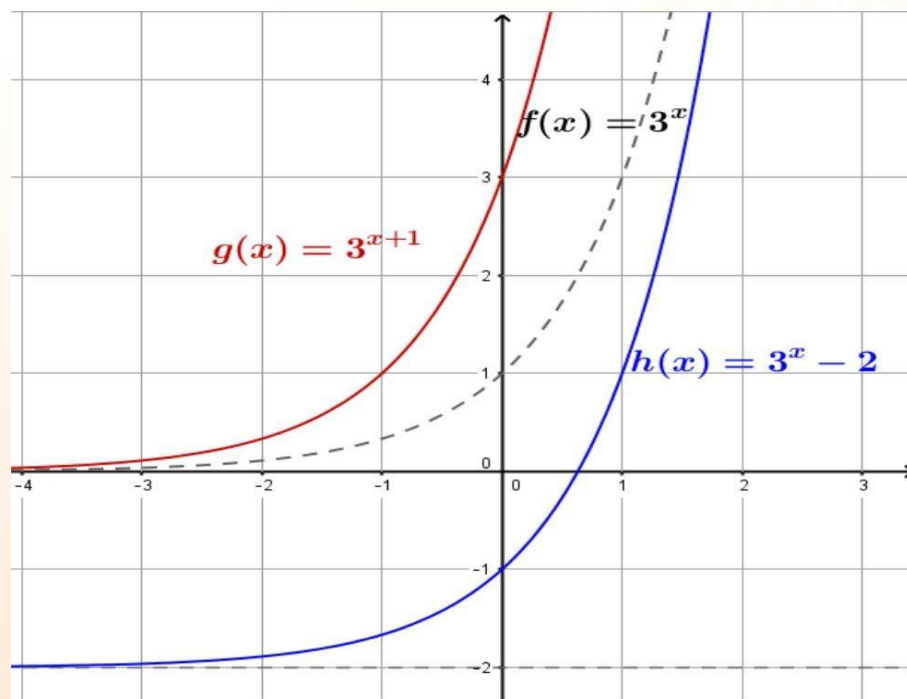


Figura: Desplazamiento de $f(x)$

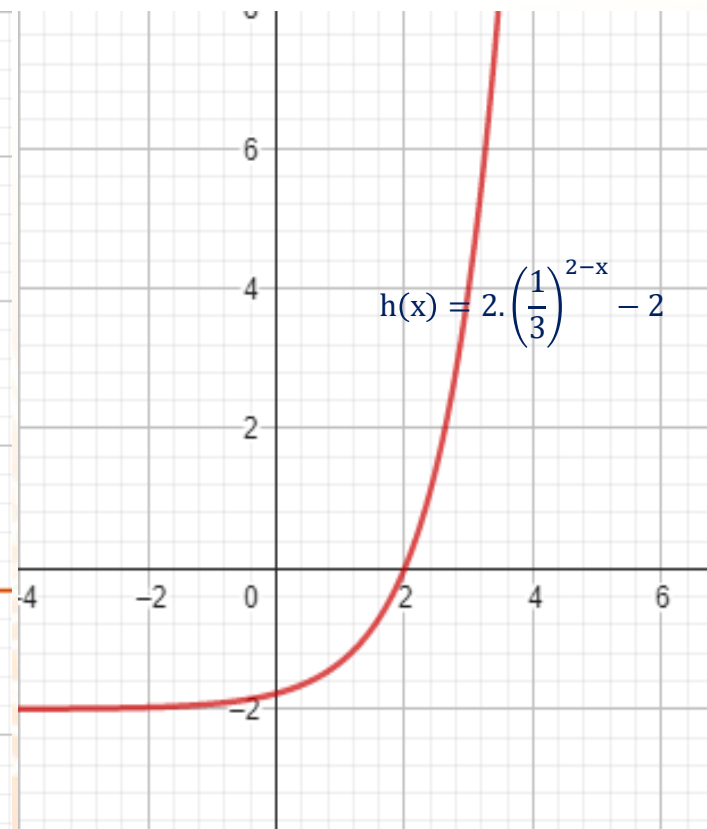
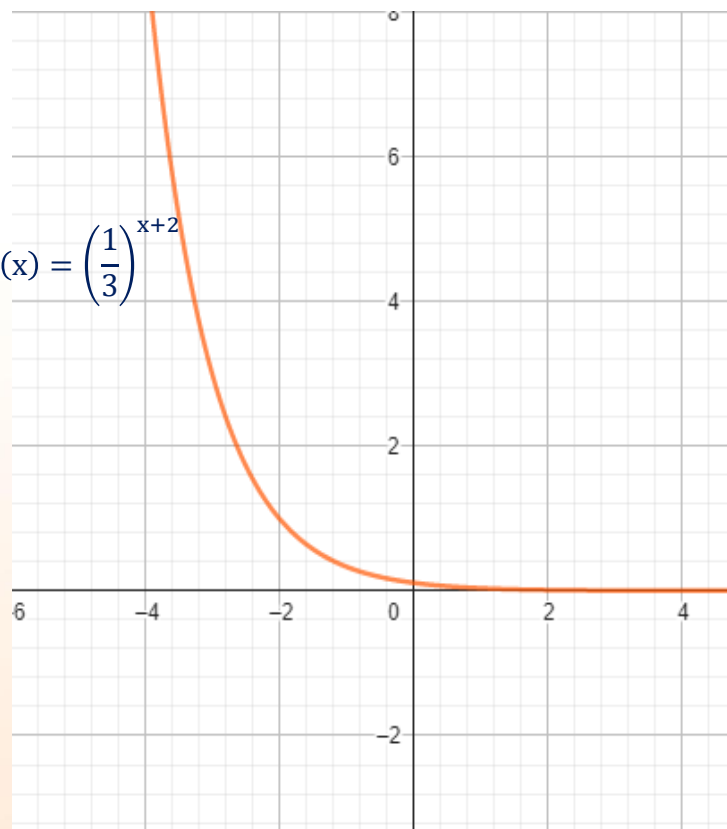
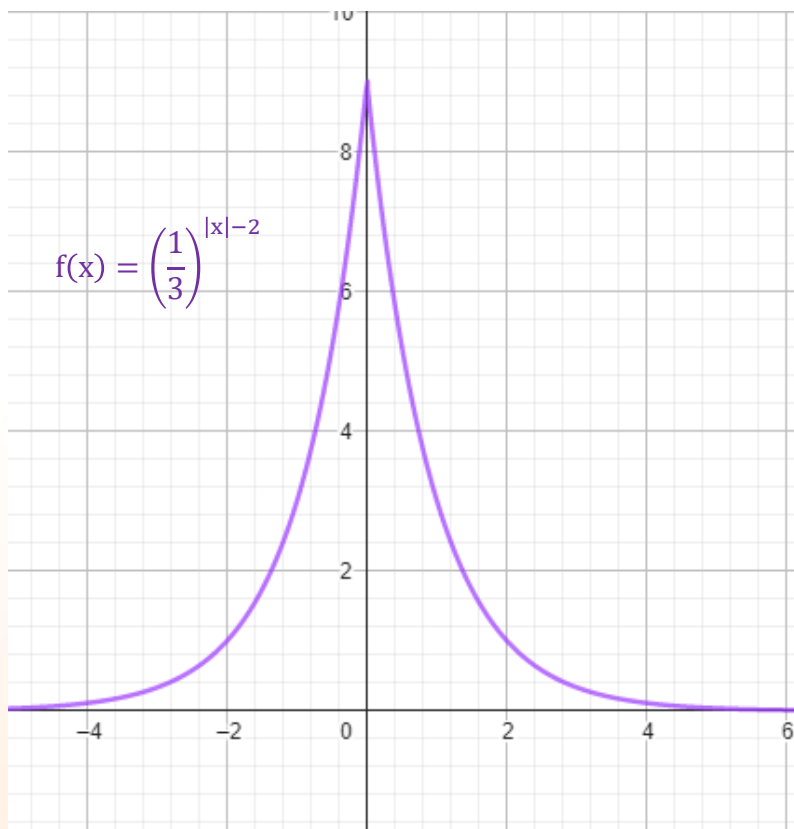


Dibuje la gráfica de la función definida por $f(x) = 2^{|x|+x} + 3^{|x|-x}$,



GRÁFICA DE ALGUNAS FUNCIONES EXPONENCIALES

Calcule el dominio y el rango de las siguientes funciones, cuyas gráficas se muestran:



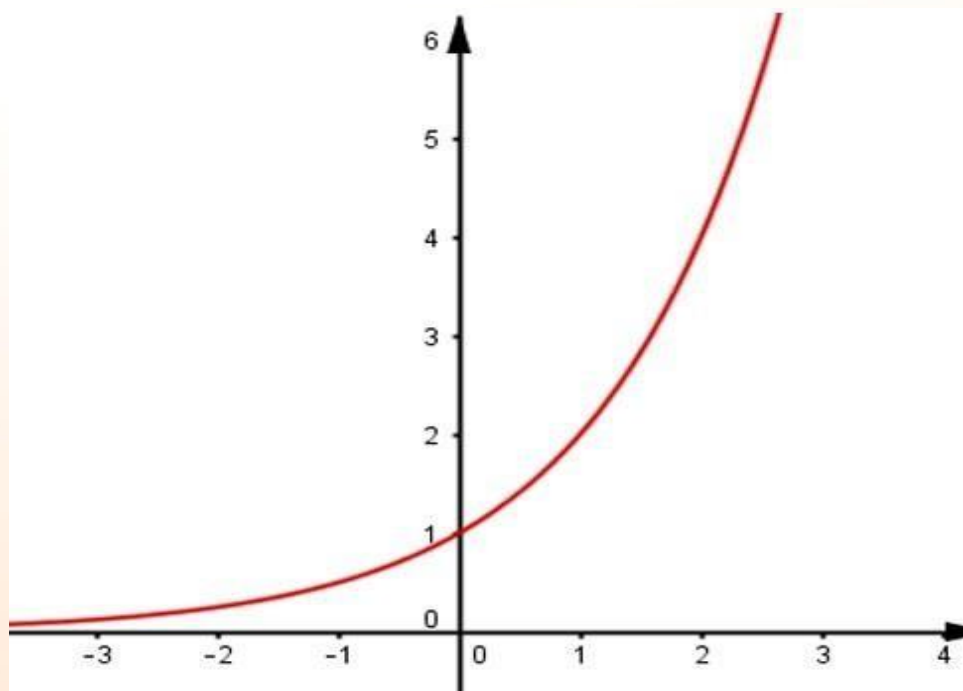
Función Exponencial Natural

Se define la función exponencial natural como

$$f(x) = \exp(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Donde

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = 2,71828182 \dots$$

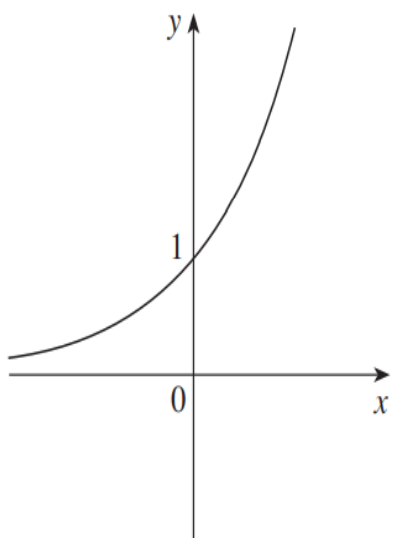


Propiedades:

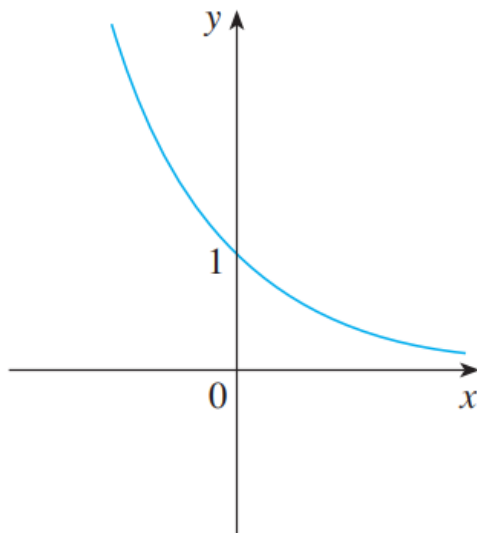
Sean $a, x, y \in \mathbb{R}$

1. $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) = e^{x+y}$
2. $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} = e^{x-y}$
3. $\exp(ax) = (\exp(x))^a = e^{ax}$

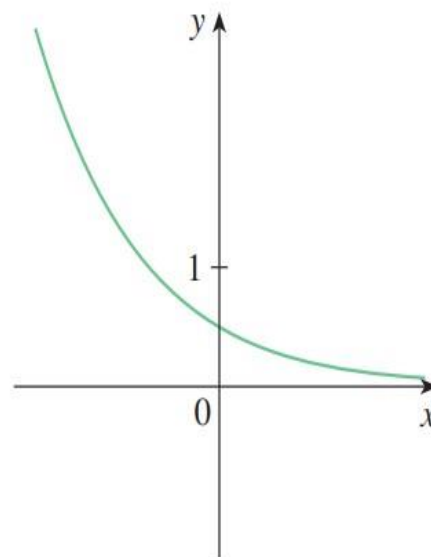
EJEMPLO: Grafique la función $f(x) = \frac{1}{2} e^{-x} - 1$, y establezca el dominio y el rango.



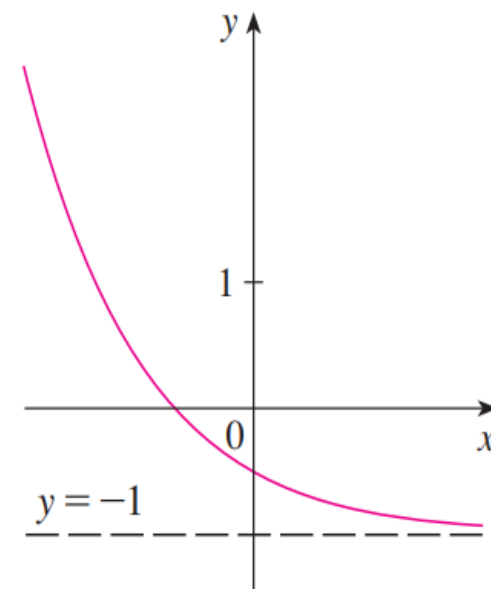
a) $y = e^x$



b) $y = e^{-x}$



c) $y = \frac{1}{2} e^{-x}$



d) $y = \frac{1}{2} e^{-x} - 1$

Del último gráfico podemos notar que $\text{Dom} f = \mathbb{R}$, y $\text{Ran} f = < -1; +\infty >$

LOGARITMO EN LOS REALES

Dados dos números reales a y b , tales que $b > 0; b \neq 1$ y $a > 0$, existe un único número real x tal que $b^x = a$.

DEFINICIÓN DE LOGARITMO

El logaritmo de un número real positivo N , en base b ($b > 0, b \neq 1$) es el exponente x al cual se debe elevar la base para obtener el número N , es decir

$$\log_b N = x \Leftrightarrow b^x = N, \quad N > 0, \quad b > 0 \wedge b \neq 1,$$

N : número

b : base

x : logaritmo

Ejemplos $\log_5 25 = 2 \Leftrightarrow 25 = 5^2$

$$\log_{\sqrt{7}} 343 = 6 \Leftrightarrow \sqrt{7}^6 = 343$$



Ejercicio

Calcular el logaritmo de $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$ en base $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}}$



IDENTIDAD FUNDAMENTAL DEL LOGARITMO

Se sabe $\log_b N = x \leftrightarrow b^x = N$ de donde se obtiene

$$b^{\log_b N} = N, \quad N > 0, \quad b > 0 \wedge b \neq 1$$

PROPIEDADES GENERALES DE LOS LOGARITMOS

Sean $M > 0, N > 0, a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ y $a, b, c \neq 1$

1. $\log_b 1 = 0, \quad \log_b b = 1$
2. $\log_b (MN) = \log_b M + \log_b N$
3. $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$

4. $\log_b (N^x) = x \log_b N$ (propiedad del sombrero)

Observación

$$\log_b (N^x) \neq (\log_b N)^x$$

5. $\log_b \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n} \log_b N$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. (logaritmo de la raíz)

6. Cambio de base

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

Ejemplos:

a) $\log_{64} 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 64} = \frac{7}{6}$

b) $\frac{\log_5 16}{\log_5 \sqrt[6]{2}} = \log_{\sqrt[6]{2}} 16 = \log_2 16^6 = \log_2 2^{24} = 24$

7. Producto unitario

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1 \rightarrow \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

8. Regla de la cadena

$$\log_b a \cdot \log_a c \cdot \log_c d = \log_b d$$

9. Si a los elementos de un logaritmo lo elevamos a una misma potencia o le extraemos la misma raíz, el valor del logaritmo no se altera

a) $\log_b N = \log_{(b^n)}(N^n)$

b) $\log_b N = \log_{m\sqrt{b}} \sqrt[m]{N}$

Consecuencia: $\log_{(b^n)}(a^m) = \frac{m}{n} \log_b a$

10. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

EJERCICIOS:

2. Calcular $\frac{a^6+20}{7}$, sabiendo que $\frac{1}{a}$ es solución de la ecuación:

$$4^x + \frac{5}{2} - \frac{9}{2^{2x}} = 0$$

A) 7 B) 8 C) 12 D) 15 E) 21

3. El logaritmo de N en base 5 es el mismo que el logaritmo de M en base $\sqrt{5}$. Si $M + N = \frac{3}{4}$, calcule $\frac{M}{N}$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 2 D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{6}$

COLOGARITMO(Colog)

El cologaritmo de un número se define como el logaritmo de la inversa del número dado.

$$\text{colog}_b N = \log_b \frac{1}{N} = -\log_b N$$

Ejemplo: $\text{colog}_3 27 = -\log_3 27 = -3$

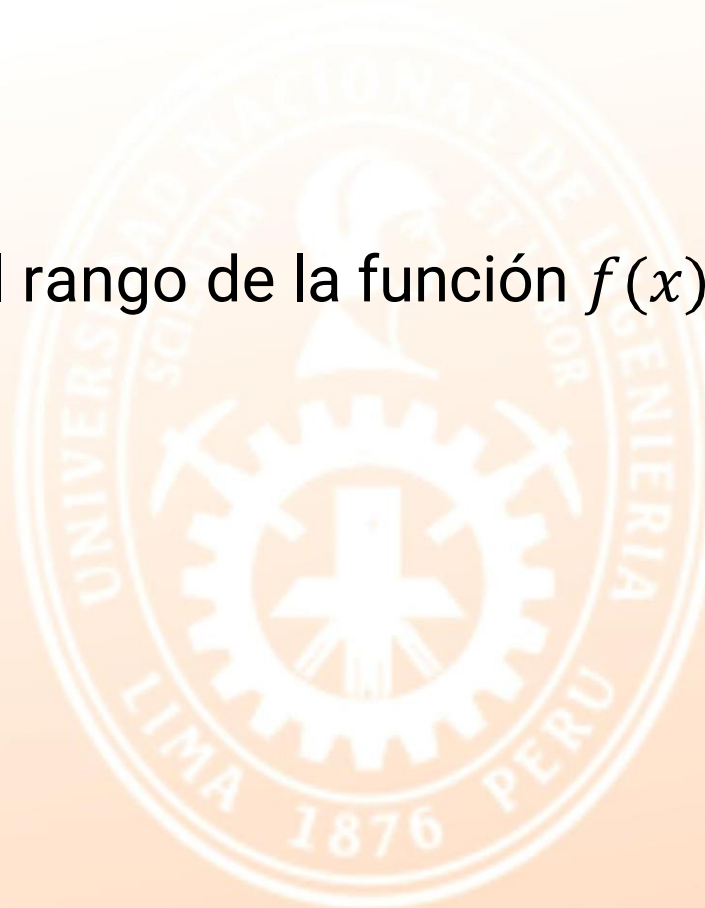
Utilidad de los Logaritmos.

1. Existen logaritmo solo de números reales positivos
2. No existen logaritmo de números negativos en los reales.
3. Los logaritmos facilitan el cálculo de operaciones como convertir el producto en suma, la división en resta, la potencia en multiplicación.
4. Los logaritmos permiten resolver todo tipo de ecuaciones exponenciales.

Ejercicios:

1. Si $\log 2 = a$ y $\log 3 = b$, entonces $\log_6 48$, es igual a

2. El intervalo $\left[\frac{19}{81}; +\infty\right]$ es el rango de la función $f(x) = 2 \cdot 3^x + 9^x$.
Determine su dominio.



SISTEMA DE LOGARITMO DECIMAL

Es aquel sistema de logaritmo en el cual la base a emplear es el número 10.

NOTACIÓN $\log_{10}N = \log N$, se lee “logaritmo decimal de N”

Ejemplos:

$$1) \log 5 + \log 2 = \log 5 \times 2 = \log 10 = 1$$

$$2) \log 120 - \log 12 = \log \left(\frac{120}{12} \right) = \log 10 = 1$$

Ejercicio: Sabiendo que $\log 2 = a$, halle $\log 25$

Solución:

$$\begin{aligned} \log 25 &= \log 5^2 = 2 \log 5 = 2 \log \left(\frac{10}{2} \right) = 2(\log 10 - \log 2) \\ &= 2(1 - a) \end{aligned}$$

SISTEMA DE LOGARITMO NEPERIANO O NATURAL

Es aquel sistema de logaritmo en el cual la base a emplear es el número trascendente e , definido por el siguiente límite:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad \text{cuyo valor aproximado es}$$

$$e = 2,7182 \dots$$

NOTACIÓN $\log_e N = \ln N$, se lee “logaritmo neperiano de N ”

Ejemplos:

$$1. \ln e^2 + \ln e^3 = \ln(e^2 e^3) = \ln e^5 = 5 \ln e = 5$$

$$2. \ln(20e) - \ln(10e) = \ln \frac{20e}{10e} = \ln 2$$

PROBLEMAS:

1. Se tiene una progresión aritmética de 3 términos de razón igual al cuádruplo del menor término. Consideremos un sistema de logaritmos de base igual al menor de los términos y si tomamos el logaritmo de la suma de los términos de la progresión se obtiene $5 + 4\log_5 3$. Calcule el término central de la progresión.

- A) $\sqrt[4]{5}$ B) $2\sqrt[4]{5}$ C) $3\sqrt[4]{5}$ D) $4\sqrt[4]{5}$ E) $5\sqrt[4]{5}$

2. Reducir la expresión:

$$E = \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \frac{1}{\log_x 8 \cdot \log_x 16} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n}$$

Dar el valor de E cuando $x = 8$

- A) $4 \left(\frac{n-1}{n} \right)$ B) $6 \left(\frac{n-1}{n} \right)$ C) $8 \left(\frac{n-1}{n} \right)$ D) $9 \left(\frac{n-1}{n} \right)$ E) $16 \left(\frac{n-1}{n} \right)$